11/5/18

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $P_A(t) = |A - tI_n|$: το θεωρούμε ως πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, όλες οι ρίζες του $P_A(t)$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Έστω z: ρίζα του $P_A(t)$. Τότε γενικά $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = c+di$, όπου $c, d \in \mathbb{R}$ ΝΔΟ $d=0$ και άρα $z \in \mathbb{R}$

Τότε: $|A - zI_n| = 0$. Τότε το σύστημα $(A - zI_n)Z = 0$ μιγαδικών αριθμών έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση $\Rightarrow$ υπάρχει μη-μηδενική στήλη $Z \in \mathbb{C}_n$ έτσι ώστε:

$(A - (c+di)I_n) \cdot Z = 0$. Τότε: $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, όπου $z_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le n$

και άρα: $z_1 = x_1 + y_1 i, \ldots, z_n = x_n + y_n i$. και όπου: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$

Τότε: $$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ \vdots \\ x_n + y_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} i = X + Yi,$$

όπου: $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$$

Τότε: $$\boxed{(A - (c+di)I_n) \cdot (X + Yi) = 0}$$

$\Rightarrow$

$(A-(c+di)I_n)(X+Yi)=0 \Rightarrow A\cdot X - cX + dY - diX + AYi - cYi = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(A\cdot X - cX + dY)}_{\text{πραγμ. μέρο}} + \underbrace{(AY - dX - cY)i}_{\text{φανταστικό (μιγαδικό) μέρος}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\cdot X - cX + dY) + (A\cdot Y - dX - cY)i = 0 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}i$

$\Rightarrow \begin{cases} A\cdot X - cX + dY = 0 \\ A\cdot Y - dX - cY = 0 \end{cases}$: Θεωρούμε εσωτερικό γινόμενο με την Y : Θεωρούμε εσωτερικό γινόμενο με την X

$\langle A\cdot X - cX + dY, Y\rangle = 0$

$\langle A\cdot Y - cY - dX, X\rangle = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \langle AX, Y\rangle - c\langle X, Y\rangle + d\langle Y, Y\rangle = 0 \\ \langle AY, X\rangle - c\langle Y, X\rangle - d\langle X, X\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Όμως επειδή ο A είναι συμμετρικός, θα έχουμε: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n: \langle AX, Y\rangle = \langle X, A\cdot Y\rangle$ (*)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} \langle AX, Y\rangle - c\langle X, Y\rangle + d\langle Y, Y\rangle = 0 \\ \langle X, AY\rangle - c\langle X, Y\rangle - d\langle X, X\rangle = 0 \end{cases}$ Αφαιρούμε:

: και θα έχουμε: $d(\langle Y, Y\rangle + \langle X, X\rangle) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d(\|y\|^2 + \|x\|^2) = 0$

Αν $\|y\|^2 + \|x\|^2 = 0 \Rightarrow \|y\| = \|x\| = 0 \Rightarrow X = Y = 0$.
Τότε όμως $Z = X + Yi = 0$: άτοπο, διότι η στήλη μιγαδικών αριθμών $Z \neq 0$

$\Rightarrow$

Άρα: $d=0$, δηλαδή η ιδιοτιμή (μιγαδική), $z=c+di$ του A είναι της μορφής $c\in\mathbb{R}$

Επομένως όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $f: E \to E$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός (δηλ. $f=f^*$), όπου $(E,\langle,\rangle)$: Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του f είναι πραγματικές $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_f(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$, όπου $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν B: ΟΚΒ του E, τότε $M_B^B(f) \overset{\text{ορ}}{=} A$: συμμετρικός $\Rightarrow$ από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\Rightarrow P_f(t)=P_A(t)$ έχει όλες τις ρίζες του στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Αν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του f, ή ισοδύναμα του A, τότε: $P_f(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν ο $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, τότε: $P_A(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$, όπου: $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$

ΛΗΜΜΑ: (1) Αν $f: E\to E$ είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(E,\langle,\rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E<\infty$, τότε:

(a) Ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του f, είναι κάθετα
(b) Αν V: υπόχωρος του E, τότε: $f(V)\subseteq V \Rightarrow f(V^\perp)\subseteq V^\perp$

(2) Αν $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε:
(a) Ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν $\rightarrow$

σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A είναι κάθετα

(β) Αν V: υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε: $A\cdot X \in V \Rightarrow A\cdot Y \in V^{\perp}$
$\forall \vec{x} \in V \quad \forall Y \in V^{\perp}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (1) (α) Έστω $\vec{x}, \vec{y}$: ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ, μ, όπου $\lambda \neq \mu$. ΘΔΟ: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Τότε: $\left.\begin{array}{l} f(\vec{x}) = \lambda\cdot\vec{x} \\ f(\vec{y}) = \mu\cdot\vec{y} \end{array}\right| \Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \lambda\cdot\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \mu\cdot\vec{y}\rangle \Rightarrow \lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \mu\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0 \xRightarrow{\lambda \neq \mu} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$

(β) Έστω $\vec{y} \in V^{\perp}$ ΘΔΟ: $f(\vec{y}) \in V^{\perp}$

Έστω $\vec{x} \in V$. Τότε:
$\langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle$
$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in V \Rightarrow f(\vec{x}) \in V \\ \vec{y} \in V^{\perp} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle = 0 \Rightarrow f(\vec{y}) \in V^{\perp}$
$\forall \vec{x} \in V$

ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Για αυτοπροσαρτημένους ενδομορφισμούς):

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle,\rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$. Τότε:

$f = f^{*}$, δηλαδή ο f: αυτοπροσαρτημένος $\Leftrightarrow$ υπάρχει ΟΚΒ B του E η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Leftarrow$" Έστω ότι $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$: μια ΟΚΒ του E έτσι ώστε: $f(\vec{e_i}) = \lambda_i \vec{e_i}$, $1 \leq i \leq n$

$\to$

Τότε ο πίνακας $A = M_B^B(f)$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

ο οποίος είναι συμμετρικός. Άρα ο f: αυτοπροσαρτημένος

"$\Rightarrow$" Έστω ότι ο f: αυτοπροσαρτημένος, και έστω ότι $\dim_{\mathbb{R}} E = n$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

• Αν $n = 1$, τότε έστω $\vec{e} \in E$ όπου $\vec{e} \neq \vec{0}$ και τότε το $\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \vec{\varepsilon}$: μοναδιαίο και αποτελεί ΟΚΒ του E

Τότε: $f(\vec{\varepsilon}) = \lambda \cdot \vec{\varepsilon}$, διότι $f(\vec{\varepsilon}) \in E$ και $\{\vec{\varepsilon}\}$: βάση του E

• <u>ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ</u> <u>ΥΠΟΘΕΣΗ</u>: κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου χώρου διάστασης $<n$ (έχει) υπάρχει μια ΟΚΒ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του ενδομορφισμού.

• <u>ΓΕΝΙΚΗ</u> <u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u>: έστω $\dim_{\mathbb{R}} E = n$

Επειδή ο f: αυτοπροσαρτημένος, ο f έχει όλες του τις ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$. Θέτουμε: $\vec{e_1} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ και $V = \{k\vec{e_1} \in E \mid k \in \mathbb{R}\}$

Αν $\vec{y} \in V \Rightarrow \vec{y} = k\vec{e_1}$ και τότε:

$f(\vec{y}) = f(k \cdot \vec{e_1}) = k f(\vec{e_1}) = k f\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{k}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x}) = \frac{k}{\|\vec{x}\|} \lambda_1 \cdot \vec{x} =$

$\Rightarrow$

$= \kappa \lambda_1 \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \kappa \lambda_1 \vec{e_1}$

$f(V) \subseteq V$. Τότε από το ΛΗΜΜΑ: $f(V^\perp) \subseteq V^\perp$. Όμως ο $V^\perp$ είναι Ευκλείδειος χώρος διάστασης: $\dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V = n - 1$

Τότε η απεικόνιση $f': V^\perp \to V^\perp$, $f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$ είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $V^\perp$

Από την ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: υπάρχει ΟΚΒ $C = \{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \dots, \vec{e_n}\}$ του $V^\perp$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f' $\Rightarrow f'(\vec{e_i}) = \lambda_i \vec{e_i}$, $2 \leq i \leq n \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\vec{e_i}) = \lambda_i \vec{e_i}$, $2 \leq i \leq n$

Επειδή $E = V \oplus V^\perp$, το σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του E, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.

ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Για συμμετρικούς πίνακες)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε ο A είναι συμμετρικός $\Leftrightarrow$ $\exists$ ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta$: διαγώνιος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Leftarrow$" Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta$: διαγώνιος $\Rightarrow$

$\boxed{{}^tP = P^{-1}}$

$\Rightarrow {}^t({}^tP \cdot A \cdot P) = {}^t\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^tP \cdot {}^tA \cdot {}^{tt}P = \Delta \Rightarrow {}^tP \cdot {}^tA \cdot P = \Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{{}^tP} \cdot A \cdot \cancel{P} = \cancel{{}^tP} \cdot {}^tA \cdot \cancel{P} \Rightarrow A = {}^tA \Rightarrow$ ο A: συμμετρικός

$\longrightarrow$

" ⇒ " Έστω ότι ο A: συμμετρικός ⇒ $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι αυτοπροσαρτημένος $\xrightarrow[\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}]{\text{ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ}}$ υπάρχει ΟΚΒ $C = \{E_1', E_2', \dots E_n'\}$ του $\mathbb{R}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_A ⇒ $M_C^C(f_A) = \Delta$: διαγώνιος. Τότε οι πίνακες A, Δ είναι όμοιοι, ως πίνακες της f_A σε διαφορετικές (ΟΚΒ) βάσεις ⇒ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P: $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta$. Τότε ο P είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ στην ΟΚΒ C. Επειδή η B είναι κανονική ⇒
⇒ $P = (E_1', E_2', \dots, E_n')$. Επειδή οι βάσεις B, C είναι ΟΚΒ ⇒ P: ορθογώνιος ⇒
⇒ $P^{-1} = {}^tP$. Άρα: ${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x-z, 2y, -x+3z)$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (3,0,-1)$
$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (0,2,0)$
$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (-1,0,3)$

$\Rightarrow A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: συμμετρικός ⇒ ο f είναι αυτοπροσαρτημένος

$P_f(t) = |A - tI_3| = -(t-2)^2 (t-4)$ ⇒ ιδιοτιμές του f = $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 4 \text{ (απλή)} \end{cases}$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$: $V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$= \{x(1,0,1) + y(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ⇒ τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,1,0)$: βάση του $V(2)$ η οποία είναι ορθογώνια

⇒

Θέτουμε: $\vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\vec{\varepsilon_2} = (0,1,0)$ που τότε:

$\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}\}$: ΟΚΒ του $V(2)$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$: ~~$V(4) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A\ldots$~~

$$V(4) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$= \{x(-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ το διάνυσμα $(-1,0,1)$:

: βάση του $V(4) \Rightarrow$ το διάνυσμα $\vec{\varepsilon_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$:

: ΟΚΒ του $V(4)$

Τότε η βάση $\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} 5-t & -3 \\ -3 & 5-t \end{vmatrix} = (t-2)\cdot(t-8) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ιδιοτιμές του $A = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$

• $V(2) = \{k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 / k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: βάση του $V(2)$

Τότε θέτοντας $\varepsilon_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(2)$

$\rightarrow$

• $V(8) = \left\{ k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_2 \mid k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: βάση του $V(8)$

και θέτοντας $E_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(8)$

Τότε: $\{E_1', E_2'\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2$ και θέτοντας

$P = (E_1', E_2') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: τότε P: ορθογώνιος

και:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

19/5/18

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ~~f(x,y,z) = (2x-y...~~

$f(x,y,z) = (2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (2,-1,-1)$
$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (-1,2,-1)$
$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (-1,-1,2)$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: συμμετρι στην ΟΚΒ $B \Rightarrow$ ο f: αυτοπροσαρτημένος

$P_A(t) = |A - tI_3| = -t(t-3)^2 \Rightarrow$ Ιδιοτιμές του f είναι: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{(απλή)} \\ \lambda_2 = 3 & \text{(διπλή)} \end{cases}$

• $V(0)$: $(A - 0 \cdot I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & +2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$ Γενική λύση: $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$